OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION DE 2008

CLASSE DE PREMIERE, TOUTES SERIES SAUF S

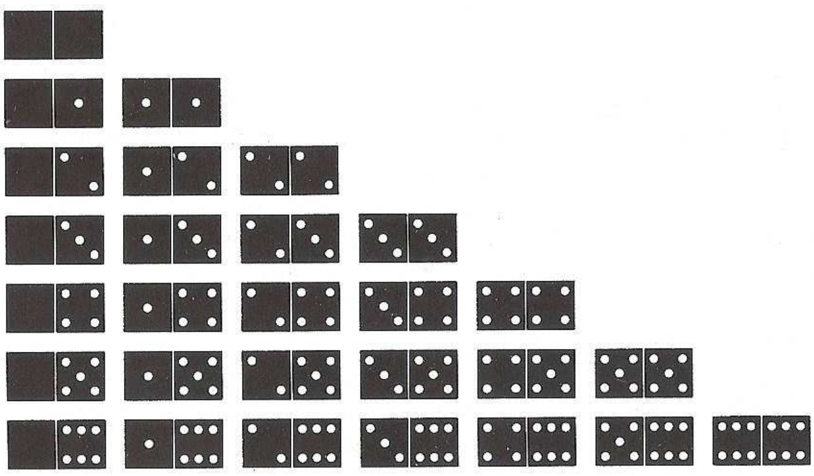
DUREE : 4 HEURES

Les quatre exercices sont indépendants.
Les calculatrices sont autorisées.
Il est rappelé aux candidats qu'il sera tenu le plus grand compte, dans l'appréciation des copies, de la clarté et de la rigueur du raisonnement.

EXERCICE 1 :

Les dominos

Le jeu de dominos occidental est constitué des 28 pièces ci-dessous :



Un carré est *magique* si les sommes des nombres des rangées, des colonnes et des diagonales principales sont toutes égales à un même nombre que l'on appellera la *constante du carré*. Le *rang* d'un tel carré est son nombre de rangées (ou de colonnes).

On souhaite réaliser des carrés magiques avec ces pièces, sachant qu'une pièce utilisée ne pourra l'être qu'une seule fois.

1. Montrer qu'avec des dominos on ne peut réaliser que des carrés magiques de rang pair.
2. Peut-on réaliser un carré magique de rang 2 ?
3. Quel est le rang maximal que l'on peut espérer réaliser avec un seul jeu ?
4. a) Quelle est la constante minimale d'un carré de rang 4 ? Donner un exemple.
   b) En déduire la constante maximale d'un carré de rang 4 ainsi qu'un exemple.

EXERCICE 2 :

Les bons nombres

On dit qu'un nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon » s'il peut s'écrire comme la somme de nombres entiers naturels non nuls, distincts ou non, dont la somme des inverses est égale à 1.

On dit qu'il est « mauvais » s'il n'est pas « bon ».

Ainsi, par exemple :

$2 = 1 + 1$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq 1$, donc 2 est « mauvais » (la seule décomposition possible pour 2 étant 1+1).

$3 = 1 + 2$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \neq 1$; $3 = 1 + 1 + 1$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq 1$; donc 3 est également « mauvais » (les deux décompositions possibles pour 3 ayant été examinées).

1. Déterminer pour chacun des nombres entiers de 4 à 10 s'il est « bon » ou « mauvais ».
2. Montrer que le carré de tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon ».
3. Montrer que si n est « bon », alors $2n + 2$ et $2n + 9$ sont « bons ».
4. On admet que tous les nombres entiers de 24 à 55 sont « bons ».
   Qu'en est-il de tout nombre entier supérieur ou égal à 56 ?

Remarque : pour une résolution complète de ce problème, on pourra consulter la publication *quadrature, n°3, avril 1990*.

EXERCICE 3 :

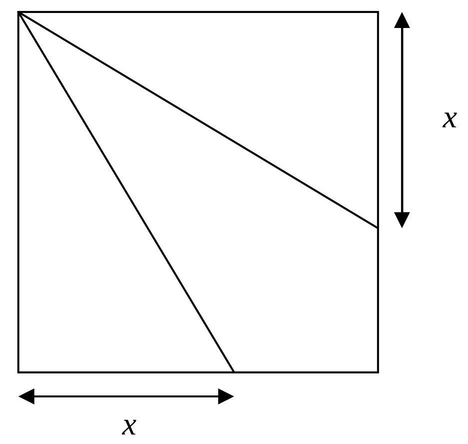
Les cyclistes

Sur une piste circulaire de longueur 400 m et de diamètre [AB].
Un cycliste part de A à une vitesse de 18 km / h et un autre part de B à une vitesse de 14,4 km / h (dans le même sens de circulation que le 1er cycliste.

1. a) Au bout de combien de temps le 1er cycliste va-t-il rattraper le 2ème cycliste pour la 1ère fois, et pour la 2ème fois ?
   b) Les 2 cyclistes restent une heure sur la piste.
   Combien de fois vont-ils se rencontrer ?
2. Le lendemain, à la même vitesse, le 2ème cycliste part dans le sens contraire de circulation que le 1er cycliste.
   Combien de fois vont-ils se rencontrer si ils restent 1 heure sur la piste?

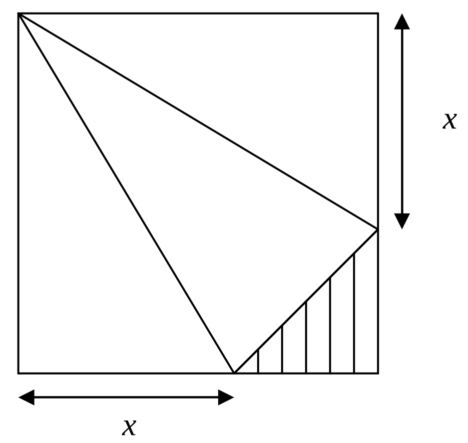
EXERCICE 4 :

Un partage équitable



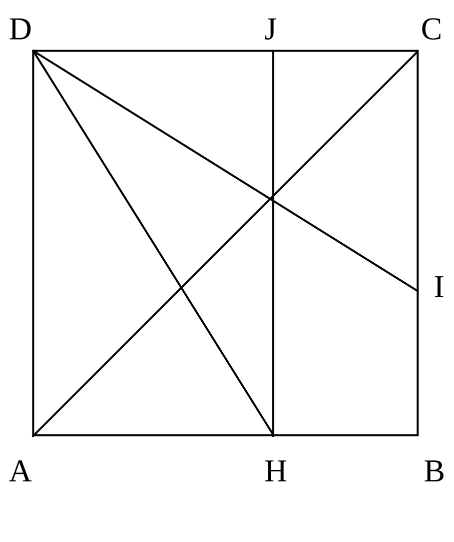
1. Léonard est géomètre. Il veut partager un carré de côté 1 en trois parties de même aire selon le schéma ci-contre.

Quelle valeur doit-il donner à x pour arriver à ses fins ?



2. Mais Léonard est aussi esthète. Ne trouvant pas élégante sa construction, il décide de supprimer la zone triangulaire hachurée. Ainsi les trois parties restantes sont triangulaires.

Peuvent-elles avoir la même aire ?



3. Et Léonard est mathématicien. Ayant réalisé grossièrement (ci-contre) la construction de la question 2, il mène du point H la perpendiculaire (HJ) à la droite (AB).

Il a l'impression que les droites (HJ), (DI) et (AC) sont concourantes.

Qu'en est-il ?